第二章　逻辑代数

2.1　逻辑代数基本公式

2.2.1　逻辑代数中的变量和常量

1．逻辑变量是二元常量，只有两个值，即 0 和 1 。

2．逻辑变量的二值 0 和 1 不表示数值的大小，而是表示两种对立的逻辑状态。

2.2　逻辑代数基本公式

2.2.2　逻辑代数的基本公式

1．常量和变量的逻辑加

$$A+0=A$$

$$A+1=1$$

2．变量和常量的逻辑乘

$$A\cdot 0=0$$

$$A\cdot 1=A$$

3．变量和反变量的逻辑加和逻辑乘

$$A+\overline{A}=1$$

$$A\cdot\overline{A}=0$$

2.2 逻辑代数基本公式

2.2.3 逻辑代数基本定律

1. 交换律

$$A+B=B+A$$

$$A\cdot B=B\cdot A$$

2. 结合律

$$A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$$

$$A\cdot B\cdot C=(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$$

3. 重叠律

$$A+A=A(A+A+A+\cdots+A=A)$$

$$A\cdot A=A(A\cdot A\cdot A\cdot\ldots\cdot A=A)$$

4. 分配律

$$A+B\cdot C=(A+B)\cdot(A+C)$$

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

2.2　逻辑代数基本公式

5. 吸收律

$$A+AB=A$$

$$A\cdot(A+B)=A$$

;

6. 非非律

$$\overline{\overline{A}}=A$$

$$A+\overline{A}=1$$

$$A\cdot\overline{A}=0$$

7. 反演律(又称摩根定律)

$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B} \qquad \overline{A+B+C+\cdots}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdots$$

$$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B} \qquad \overline{A\cdot B\cdot C\cdots}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\cdots$$

2.3　逻辑函数的化简

2.3.1　化简的意义

1．几种不同的表达式

同一逻辑关系的逻辑函数不是唯一的，它可以有几种不同表达式，**异或、与或、与或非—非、与非—与非、或与非、与或非、或非—或非**。

2．最简式

所谓最简式，必须是乘积项最少，其次是满足乘积项最少的条件下，每个乘积项中的变量个数为最少。

逻辑函数式的常见形式

一个逻辑函数的表达式不是唯一的，可以有多种形式，并且能互相转换。例如：

$$L = AC + \overline{A}B \qquad \text{与—或表达式}$$

$$= (A + B)(\overline{A} + C) \qquad \text{或—与表达式}$$

$$= \overline{\overline{AC} \cdot \overline{\overline{A}B}} \qquad \text{与非—与非表达式}$$

$$= \overline{\overline{A + B} + \overline{\overline{A} + C}} \qquad \text{或非—或非表达式}$$

$$= \overline{A\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}} \qquad \text{与—或—非表达式}$$

其中，与—或表达式是逻辑函数的最基本表达形式。

2.3　逻辑函数的化简

2.3.2　化简的方法

（1）并项法：

运用公式 $A+\overline{A}=1$ 将两项合并为一项，消去一个变量。

例： $L=A(BC+\overline{B}\,\overline{C})+A(B\overline{C}+\overline{B}C)$

$$=ABC+A\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}+A\overline{B}C$$

$$=AB(C+\overline{C})+A\overline{B}(C+\overline{C})$$

$$=AB+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A$$

（2）吸收法：

运用吸收律 **A+AB=A**，消去多余的与项。

例： $L = A\overline{B} + A\overline{B}(C + DE) \quad = A\overline{B}$

（3）消去法：

运用吸收律 $A + \overline{A}B = A + B$ 消去多余因子。

例： $L = \overline{A} + AB + \overline{B}E \quad = \overline{A} + B + \overline{B}E \quad = \overline{A} + B + E$

（4）配项法：

先通过乘以$(A + \overline{A})$ 或加上 $(A\overline{A})$ 增加必要的乘积项，再用以上方法化简。

例： $L = AB + \overline{A}C + BCD \quad = AB + \overline{A}C + BCD(A + \overline{A})$

$= AB + \overline{A}C + ABCD + \overline{A}BCD \quad = AB + \overline{A}C$

2.3　逻辑函数的化简

2.3.3　化简举例

[例 2-1]　化简　$Y = AB + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B$

解 $Y = AB + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B = A(B+\overline{B}) + \overline{A}(B+\overline{B}) = A + \overline{A} = 1$

[例2-2]　化简　$Y = \overline{A} + \overline{B} + AB$

解 $Y = \overline{A} + \overline{B} + AB = \overline{A} + \overline{B} + A = 1 + \overline{B} = 1$

[例 2-3]　化简　$Y = AD + A\overline{D} + AB + \overline{A}C + BD$

解　$Y = AB + \overline{A}\,\overline{C} + B\overline{C} = AB + \overline{A}\,\overline{C} + (A+\overline{A})B\overline{C} = AB + \overline{A}\,\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$

$= (AB + AB\overline{C}) + (\overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}B) = AB + \overline{A}\,\overline{C}$

2.3 逻辑函数的化简

［例 2-4］ 化简 $Y = AD + A\overline{D} + AB + \overline{A}C + BD$

解

$$
\begin{aligned}
Y &= AD + A\overline{D} + AB + \overline{A}C + BD \\
&= (AD + A\overline{D}) + AB + \overline{A}C + BD \\
&= A + AB + \overline{A}C + BD \\
&= (A + \overline{A}C) + BD \\
&= A + C + BD
\end{aligned}
$$

2.3 逻辑函数的化简

[例 2-5] 化简 $\overline{AB+\bar{A}C} = A\bar{B}+\bar{A}\bar{C}$

解

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= \overline{AB+\bar{A}C} = (\overline{AB})\cdot(\overline{\bar{A}C}) \\
&= (\bar{A}+\bar{B})\cdot(A+\bar{C}) = A\bar{B}+\bar{A}\bar{C}+\bar{B}\bar{C} \\
&= A\bar{B}+\bar{A}\bar{C}+(A+\bar{A})\bar{B}\bar{C} \\
&= A\bar{B}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}\bar{C} \\
&= A\bar{B}+\bar{A}\bar{C} = \text{右式}
\end{aligned}
$$

[例 2-6] 化简 $\overline{A\bar{B}+\bar{A}B} = AB+\bar{A}\bar{B}$

解

$$\text{左式} = \overline{A\bar{B}+\bar{A}B} = (\overline{A\bar{B}})\cdot(\overline{\bar{A}B}) = (\bar{A}+B)\cdot(A+\bar{B}) = AB+\bar{A}\bar{B} = \text{右式}$$

在化简逻辑函数时，要灵活运用上述方法，才能将逻辑函数化为最简。

例化简逻辑函数：

$$L = AD + A\overline{D} + AB + \overline{A}C + BD + A\overline{B}EF + \overline{B}EF$$

解：

$$L = A + AB + \overline{A}C + BD + A\overline{B}EF + \overline{B}EF$$

（利用 $A + \overline{A} = 1$）

$$= A + \overline{A}C + BD + \overline{B}EF$$

（利用$A+AB=A$）

$$= A + C + BD + \overline{B}EF$$

（利用 $A + \overline{A}B = A + B$）

例 化简逻辑函数：

$$L = AB + A\overline{C} + \overline{B}C + \overline{C}B + \overline{B}D + \overline{D}B + ADE(F+G)$$

$$= A + \overline{B}C + \overline{C}B + \overline{B}D + \overline{D}B + ADE(F+G)$$

（利用 $A + \overline{A}B = A + B$ ）

$$= A + \overline{B}C + \overline{C}B + \overline{B}D + \overline{D}B$$ （利用**A+AB=A**）

$$= A + \overline{B}C(D+\overline{D}) + \overline{C}B + \overline{B}D + \overline{D}B(C+\overline{C})$$ （配项法）

$$= A + \overline{B}CD + \overline{B}C\overline{D} + \overline{C}B + \overline{B}D + \overline{D}BC + \overline{D}B\overline{C}$$

$$= A + \overline{B}C\overline{D} + \overline{C}B + \overline{B}D + \overline{D}BC$$ （利用**A+AB=A**）

$$= A + C\overline{D}(\overline{B} + B) + \overline{C}B + \overline{B}D$$

$$= A + C\overline{D} + \overline{C}B + \overline{B}D$$ （利用 $A + \overline{A} = 1$ ）

例 化简逻辑函数：$L = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$

解法1：$L = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B + A\overline{C}$ （增加多余项 $A\overline{C}$ ）

$= A\overline{B} + \overline{B}C + \overline{A}B + A\overline{C}$ （消去一个多余项 $B\overline{C}$ ）

$= \overline{B}C + \overline{A}B + A\overline{C}$ （再消去一个多余项 $A\overline{B}$ ）

解法2：$L = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B + \overline{A}C$ （增加多余项 $\overline{A}C$ ）

$= A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{A}B + \overline{A}C$ （消去一个多余项 $\overline{B}C$ ）

$= A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{A}C$ （再消去一个多余项 $\overline{A}B$ ）

由上例可知，有些逻辑函数的化简结果不是唯一的。

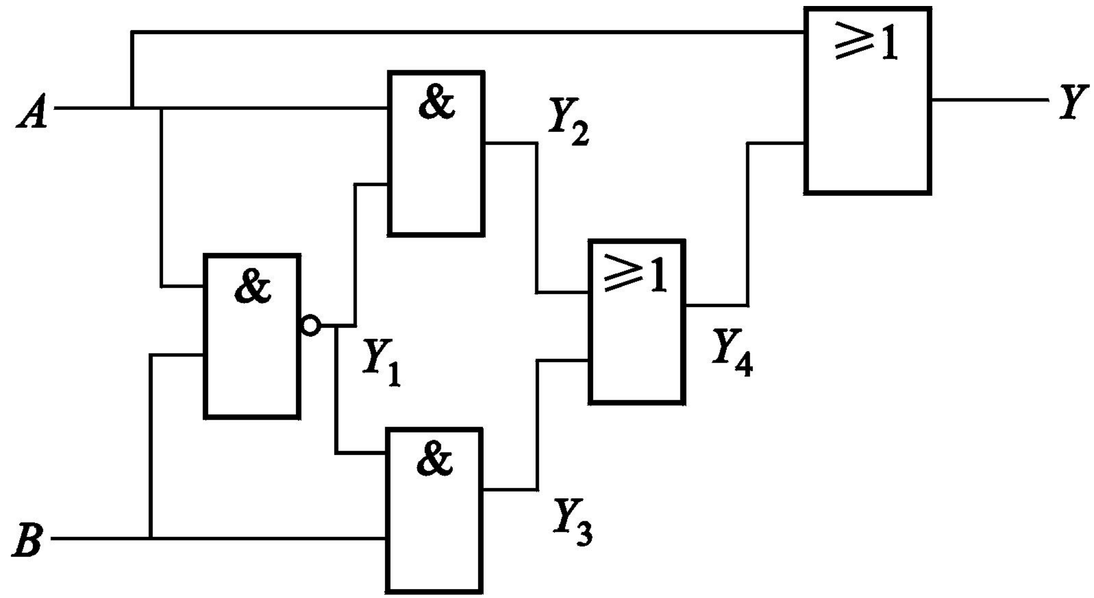
代数化简法的优点：不受变量数目的限制。

缺点：没有固定的步骤可循；需要熟练运用各种公式和定理；需要一定的技巧和经验；不易判定化简结果是否最简。

2.4 逻辑电路图、真值表与逻辑函数间的关系

2.4.1 逻辑电路与逻辑函数式的互换

［例 2-7］ 将图中的逻辑电路的输出 Y 和输入 A、B 的逻辑关系写成逻辑函数式。



解 电路中各个逻辑门的输出 Y_1、 Y_2、 Y_3、 Y_4 和 Y 分别为

$$Y_1 = \overline{AB} \qquad Y_2 = AY_1$$

$$Y_3 = Y_1 B$$

$$Y_4 = Y_2 + Y_3$$

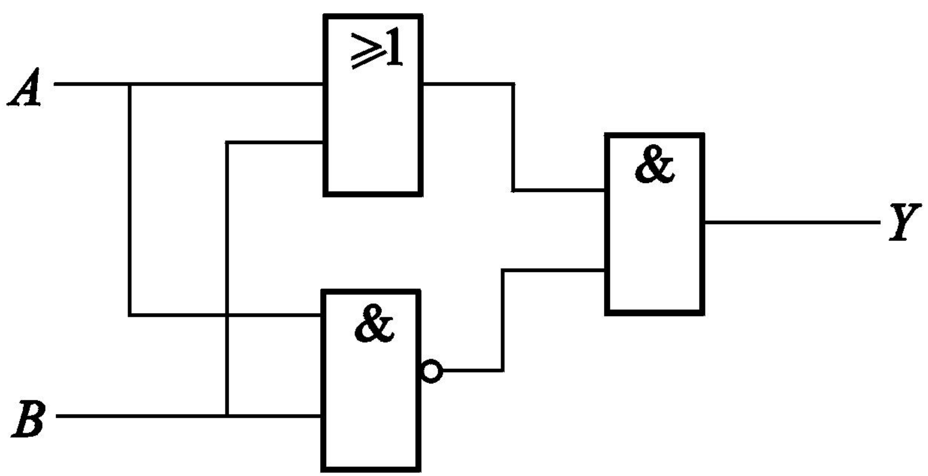
$$Y = A + Y_4$$

$$Y = A + (A\overline{AB} + \overline{AB}B)$$

2.4 逻辑电路图、直值表与逻辑函数间的关系

［例 2-8］ 画出逻辑函数式 $Y=(A+B)\overline{AB}$ 的逻辑电路。

解 画出的逻辑电路如图所示 。



2.4　逻辑电路图、直值表与逻辑函数间的关系

2.4.2　逻辑电路与真值表的互换

1．由逻辑函数列真值表

（1）若输入变量数为 n，则输入变量不同状态的组合数目为 2^n 。

（2）列表时，输入状态按 n 列， 2^n 行画好表格，然后从右到左，在第一列中填入 0、1、0、1…；第二列中填入 0、0、1、1、0、0、1、1，…；在第三列中填入 0、0、0、0、1、1、1、1…；依此类推，直到填满表格。然后，把每一行中各输入变量状态代入函数式，计算并记下输出状态列入表中。

2.4 逻辑电路图、直值表与逻辑函数间的关系

［例 2-9］ 列出逻辑函数式 $Y=\overline{A}B+A\overline{B}$ 的真值表。

解

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2．由真值表列出逻辑函数式

方法：

（1）从真值表上找出输出为 1 的各行，把每行的输入变量写成乘积形式；遇到 0 的输入变量加非号。

（2）把各乘积项相加。

2.4 逻辑电路图、真值表与逻辑函数间的关系

[例 2-10] 试由真值表列出相应的逻辑函数式。

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

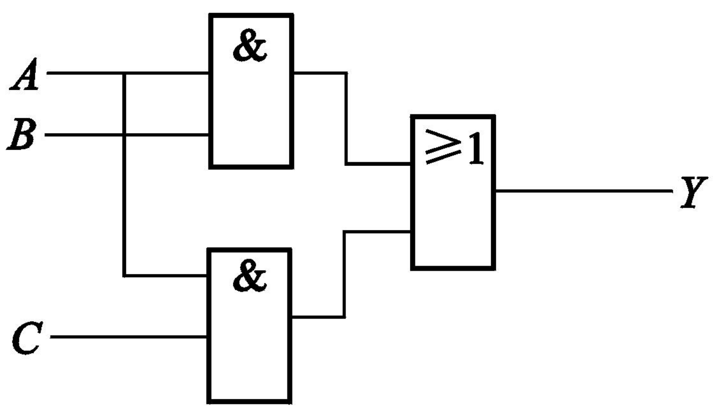
解 $Y = A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC + ABC$

2.4　逻辑电路图、真值表与逻辑函数间的关系

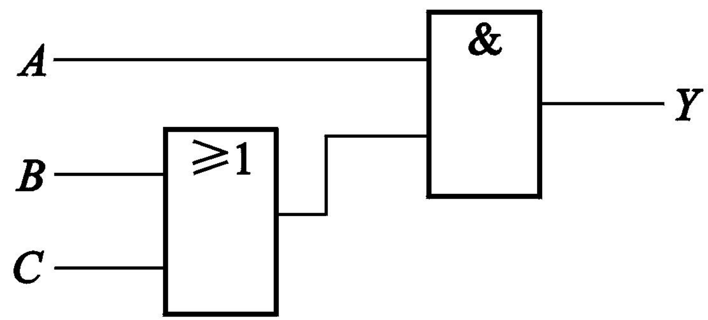
2.4.3　逻辑代数在逻辑电路中的应用

［例 2-11］　试根据 $Y=AB+AC$ 逻辑函数，设计逻辑电路。

解　画出相应的逻辑电路如图（a）所示。



(a)



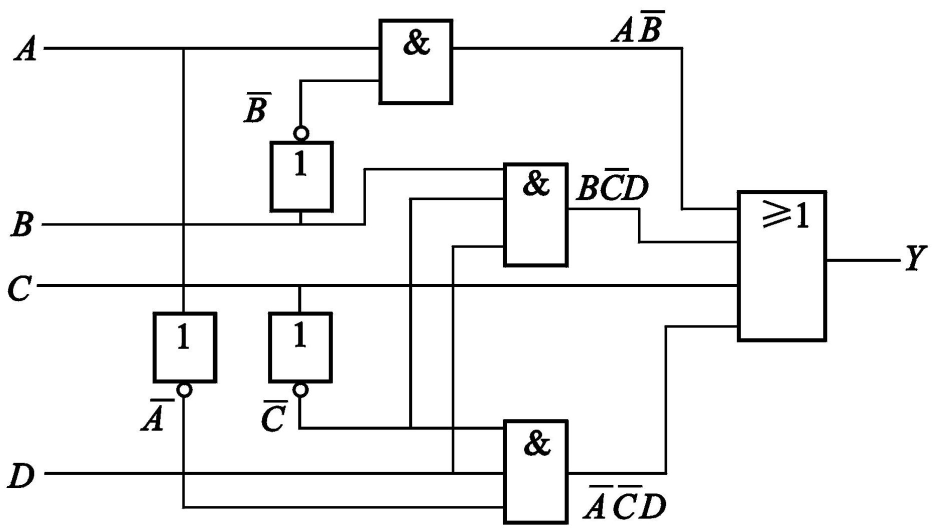
(b)

如果 $Y=A(B+C)$，则可得更简单的逻辑电路如图（b）所示。

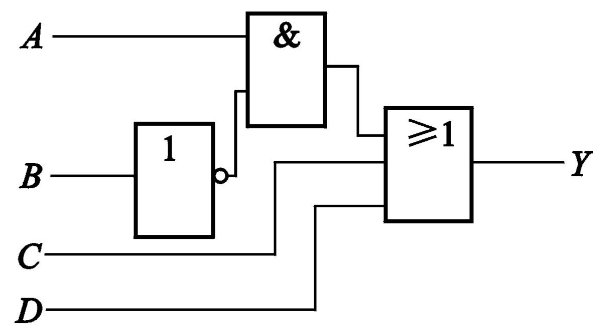
2.4 逻辑电路图、直值表与逻辑函数间的关系

［例 2-12］ 根据 $Y = A\overline{B} + C + \overline{A}\,\overline{C}D + B\overline{C}D$设计逻辑电路。

解 画出相应的逻辑电路如图（a）所示。



(a)



(b)

如果将函数式化简成 $Y = A\overline{B} + C +, D$电路图如（b）所示。

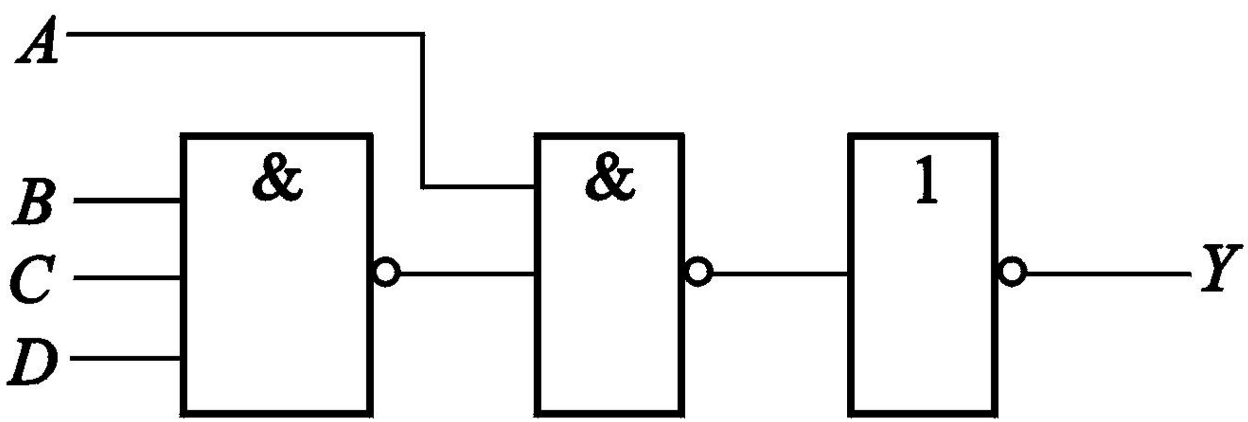
2.4 逻辑电路图、真值表与逻辑函数间的关系

［例 2-13］ 变换函数式 $A\overline{B}+A\overline{C}+A\overline{D}$为与非—与非表达式，并画出对应的逻辑电路图。

解

$$A\overline{B}+A\overline{C}+A\overline{D}=A(\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})=A\cdot\overline{B\cdot C\cdot D}=\overline{\overline{A\cdot\overline{B\cdot C\cdot D}}}$$

逻辑电路如图所示 。



本章小结

1．逻辑函数的表示方法有：真值表、逻辑函数表达式、逻辑电路图。

2．逻辑函数的化简方法有：并项法、吸收法、消去法和配项法。